

Temps Limit : 1h 30m

Enregistrer votre script sous le nom “<nom>.examen.py”. Où <nom> est votre nom.

Nous avons vu en classe que le modèle de l'épidémie SIR peut être décrit par les équations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(t)}{\partial t} &= -\beta \frac{S(t)}{N} I(t) \\ \frac{\partial I(t)}{\partial t} &= +\beta \frac{S(t)}{N} I(t) - \mu I(t) \\ \frac{\partial R(t)}{\partial t} &= +\mu I(t)\end{aligned}\tag{1}$$

Nous pouvons calculer numériquement la dérivée avec :

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Avec cette définition, on trouve :

$$\begin{aligned}S(t + \Delta t) &= S(t) \left[1 - \beta I(t) \frac{\Delta t}{N} \right] \\ I(t + \Delta t) &= I(t) \left[1 + \beta S(t) \frac{\Delta t}{N} - \mu \Delta t \right] \\ R(t + \Delta t) &= R(t) + \mu \Delta t I(t)\end{aligned}$$

utilisant :

$$\begin{aligned}N &= 100000 \\ I(0) &= 10 \\ \beta &= 0.3 \\ \mu &= 0.1\end{aligned}$$

1. Écrire une fonction, **explicit**($N, I0, deltaT$) qui calcule les valeurs de $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ pour $t \in [0, 365]$ en pas de Δt .
2. Calculer les valeurs de $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ pour $\Delta t = 0.1$
3. Écrire une fonction qui implémente les Équations 1
4. Utilisez les fonctions de `scipy` pour intégrer les équations 1 pour $t \in [0, 365]$ en pas de $\Delta t = 1$
5. Tracer les valeurs de $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ trouvées à la Question 2 et 4. Enregistrez le fichier comme **comparison.png**.
6. Écrire une fonction, **error**($I, Ie, deltaT$) qui calcule :

$$err = \frac{1.0}{365} \left| \sum_i I_i - \Delta t \sum_j I_j^e \right|$$

où I_j^e sont les valeurs de $I(t)$ calculés en question 2 et I_i sont les valeurs de $I(t)$ calculés en question 4.
The expression :

$$A = \Delta t \sum_j I_j^e$$

est juste un moyen simple de calculer l'aire sous la courbe de $I^e(t)$.

7. Calculer la valeur de *err* pour 10 valeurs de $\Delta t \in [0.001, 1]$
8. Tracer les valeurs de *err* en fonction de Δt . Enregistrez le fichier comme **errorSIR.png**.