Ateliers Mathematiques
Avril 2013
Partiel

Temps Limit : 2h 00m

Enregistrer votre script sous le nom “<nom>. partiel.py”. Où <nom> est votre nom.

1. On peut étudier le mouvement des planètes en intégrant numériquement les équations du mouvement :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial t} &= v_x \\
\frac{\partial y}{\partial t} &= v_y \\
\frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{-Mx}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^{3/2}} \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{-My}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^{3/2}}
\end{aligned}
$$

   Écrire une fonction qui implémente ces équations.
2. Intégrer ces équations pour $t \in [0, 1.339]$ avec $\vec{r}_0 = (0.25, 0)$ et $\vec{v}_0 = (0.0, 0.05)$. Utilisez $5,000$ pas.
3. Tracer la trajectoire (y en fonction de x) dans le fichier **"planet.png"**.
4. Calculer la moyenne du produit scalaire de $\vec{r}\,(t)$ et $\vec{v}\,(t)$, $\langle \vec{r}\,(t) \cdot \vec{v}\,(t) \rangle$.
5. Définir la matrice $(N \times N)$ avec -1 sur la diagonale principale et 1 dans la première diagonale :

$$
A = \frac{1}{\Delta t}\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & -1
\end{pmatrix} \tag{1}
$$

   pour $N = 5,000$. Il s'agit d'une représentation simple d'un opérateur différentiel numérique.
6. Calculer les composantes de l'accélération à l'aide de :

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_x\,(t) &= A \cdot \vec{v}_x\,(t) \\
\vec{a}_y\,(t) &= A \cdot \vec{v}_y\,(t)
\end{aligned} \tag{2}
$$

   où Δt est l'intervalle entre deux pas de temps consécutifs.
7. Calculer la norme de la position, $||\vec{r}\,(t)\,||$, vitesse, $||\vec{v}\,(t)\,||$, et accélération $||\vec{a}\,(t)\,||$ pour chaque point dans le temps.
8. Tracé $||\vec{v}\,(t)\,||$ et $||\vec{a}\,(t)\,||$ comme une fonction de $||\vec{r}\,(t)\,||$. Enregistrez le fichier comme **“phase.png”**.
9. Écrire les valeurs des vecteurs t, x, y, v_x, v_y dans le fichier **“planet.dat”**.
10. Calculer la moyenne du produit scalaire de $\vec{r}\,(t)$ et $\vec{a}\,(t)$, $\langle \vec{r}\,(t) \cdot \vec{a}\,(t) \rangle$.